

I. La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$:

a. Activité :

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \ln x \end{cases}$$

1. Est-ce que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} ?

b. Vocabulaire et notation :

fonction réciproque f^{-1} de f est appelée **la fonction exponentielle népérienne** (ou la fonction exponentielle), on note $f^{-1} = \exp$ ou $f^{-1} = e$.

c. Définition et propriété :

La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \ln x \end{cases}$$
 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} , on l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par : $f^{-1} = \exp$ ou $f^{-1} = e$ avec
$$\begin{aligned} f^{-1} &= \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \exp(x) \end{aligned}$$

d. Conséquences :

- La fonction exponentielle népérienne $f^{-1} = \exp$ ou $f^{-1} = e$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la courbe de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice (la droite d'équation $(D) : y = x$).
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.
- Relation entre $f(x) = \ln(x)$ et $f^{-1}(x) = \exp(x)$ est
$$\left. \begin{aligned} \exp(x) &= y \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$$
- On a : $\forall x \in]0, +\infty[: f^{-1} \circ f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$ donc
$$\forall x \in]0, +\infty[, \exp \circ \ln(x) = x \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = x$$
- On a : $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x$

e. Nouvelle notation :

On sait que : (1) : $\forall r \in \mathbb{Q}, r = \ln(e^r)$ d'où

$$(1) \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = \exp(\ln(e^r)) \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r$$

On obtient : $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = e^r$ par conséquent on va prolonger ce résultat à tous les nombres réels x .

d'où la nouvelle notation : $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$.

Donc :
$$\begin{aligned} f^{-1} &= \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

f. Propriétés :

1. $y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$ et $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$ et $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$.

g. Exemples :

1. $e^{-3} = 0$
2. $e^{\ln(24)} = 24$ et $\ln(e^{-13}) = -13$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $e^{x+3} = e^{2x+7}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x+1} < e^{6x-2}$.
5. Ensemble de définition des fonctions : $f(x) = \frac{2}{e^x}$ et $g(x) = \sqrt{e^x}$

II. Propriétés algébriques :

a. Propriétés :

Soient a et b et x de $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

propriétés	Exemples		propriétés	Exemples	
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^7 = e^4 \times e^3$	1	$(e^x)^r = e^{rx}$ ($r \in \mathbb{Q}$)	$(e^x)^3 = e^{3x}$	4
$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	2	$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$	$\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$	5
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^5 = \frac{e^7}{e^2}$	3	$\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$	$\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$	6

b. Preuve : pour $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

c. Remarques :

- $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$ et $e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x}$.
- $\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$.
- $f(x) = e^{u(x)}, x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$

III. Limites :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0 ; n \in \mathbb{N}^*$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty ; n \in \mathbb{N}^*$	

a. Exemple :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$:
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3}$:

IV. Dérivée de la fonction $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$.

a. Théorème :

la fonction $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$.

b. Preuve :

c. Théorème :

Si la fonction $u(x)$ est dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est $f'(x) = \left[e^{u(x)} \right]' = u'(x) e^{u(x)}$.

d. Exemple :

Soit la fonction $f(x) = e^{5x^3+3x}$

e. Remarque :

Les fonctions primitives de la fonction $g(x) = u'(x) e^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme

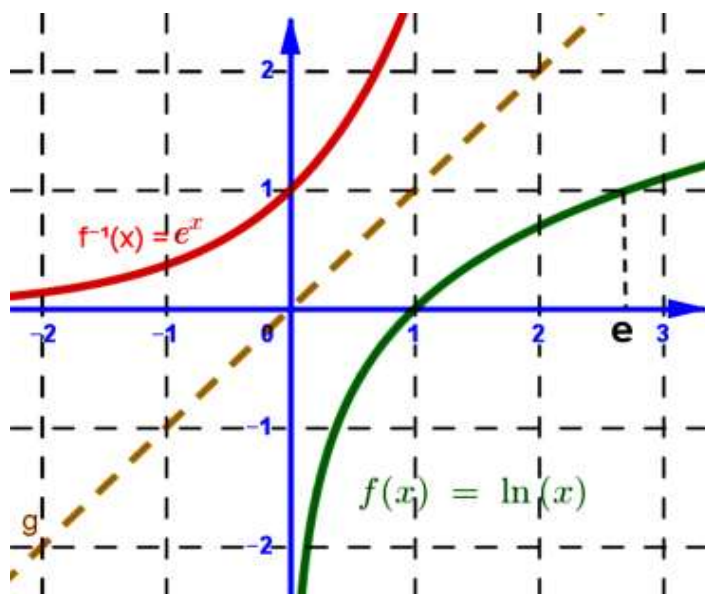
$$G(x) = e^{u(x)} + c ; (c \in \mathbb{R}).$$

f. Exemple :

On détermine les primitives de la fonction $f(x) = x \cdot e^{3x^2+1}$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x^2+1} + c$

V. Etude de la fonction $f(x) = e^x$:

Tableau de variation de f :



VI. Fonction exponentielle de base a avec $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

a. Définition :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

La fonction définie par : $\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$

donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} , on l'appelle fonction exponentielle de base a et définie par :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0,+\infty[$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \exp_a(x)$$

b. Nouvelle notation :

• On a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{x \ln(a)}$$

D'où $f^{-1}(x) = \exp_a(x) = e^{x \ln a}$

• On prend $x = r \in \mathbb{Q}$ on a : $f^{-1}(r) = \exp_a(x) = e^{r \ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$ d'où : $\exp_a(x) = a^x$.

• On prolonge cette écriture pour tous les nombres réels x de $\mathbb{R}$ on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = e^{x \ln a} = a^x$.

• Conclusion :

• $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$.

c. Exemple :

$$5^x = e^{x \ln 5} \text{ et } \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x \ln 5} \text{ et } 10^x = e^{x \ln 10}.$$

d. Remarques :

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $\log_a(a^x) = x$.

• Pour tout $x > 0$ on a : $a^{\log_a(x)} = x$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $10^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}(y)$.

e. Conséquences :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et la fonction $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

1. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

2. $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times e^{x \ln a} = (\ln(a)) \times a^x$.

3. D'où le signe : $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$ est le signe de $\ln a$.

• $0 < a < 1$ alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ strictement décroissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

• $a > 1$ alors $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ strictement croissante d'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$.

f. Propriétés :

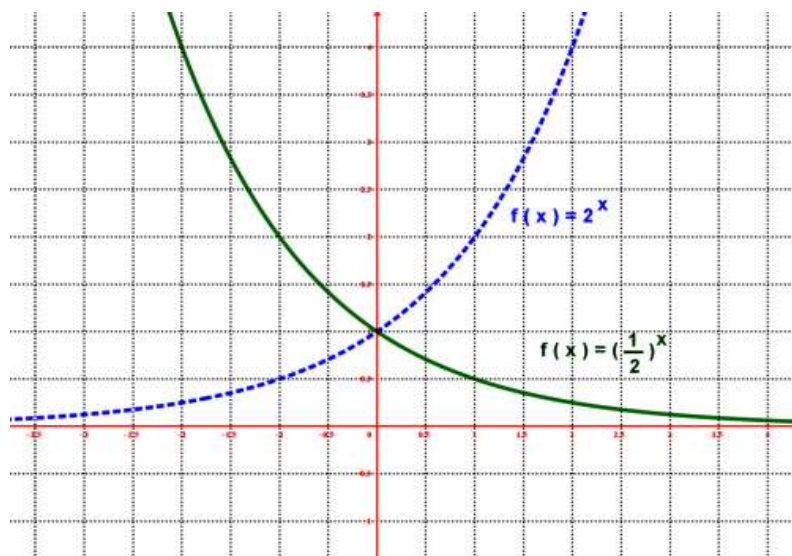
$a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \text{ et } (a^x)^y = a^{xy} \text{ et } \frac{1}{a^x} = a^{-x} \text{ et } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

g. La courbe représentative de $f(x) = a^x$ avec $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Cas $0 < a < 1$ on prend $a = \frac{1}{2}$ donc $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Cas $a > 1$ on prend $a = 2$ donc $f(x) = 2^x$.



h. Exemple :

1. Ecrire la fonction $f(x) = 3^{x^3-x}$ en fonction de la fonction exponentielle népérienne.
2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Calculer : f' la fonction dérivée de f .